Busy beaver

Flittig bever

Det er en turingmaskin med

- Alfabet Λ 1
- Start – blank tape
- Produserer en rekke 1'ere etter hverandre og stopper på venstre 1'er i stopptilstand
- Har N tilstander + stopptilstand

Beverfunksjon $\mathcal{B}(n)$

Maksimalt antall 1'ere produsert av en flittig bever med n tilstander

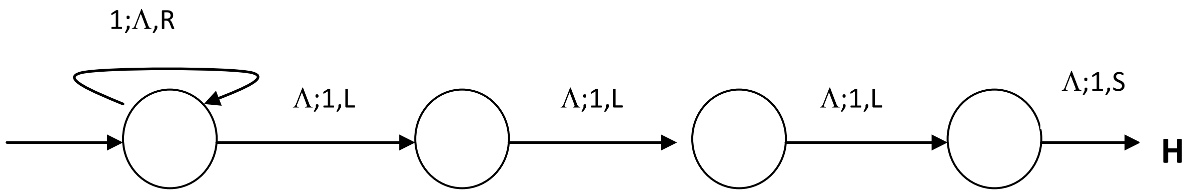
Beregnbar funksjon

En funksjon f mellom naturlige tall er beregnbar om den kan beregnes ved en turingmaskin

- Alfabet Λ 1
- Om den starter med n 1'ere på venstre 1'er, så stopper den med $f(n)$ 1'ere på venstre 1'er

Konstantene er beregnbare

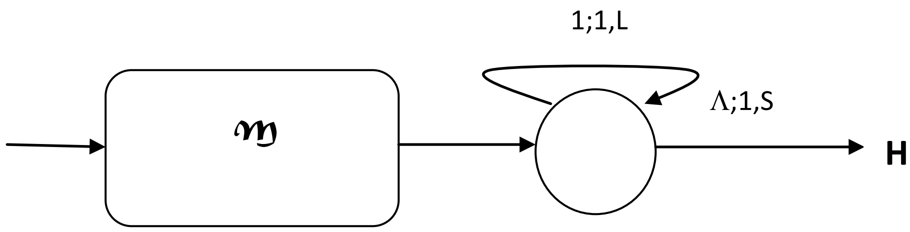
Her er turingmaskin for å beregne konstanten 4



Først stryker den ut alle 1'ere – deretter setter den opp 4 1'ere og stopper på venstre 1'er. Vi trenger K tilstander for å beregne konstanten K .

Etterfølger er beregnbar

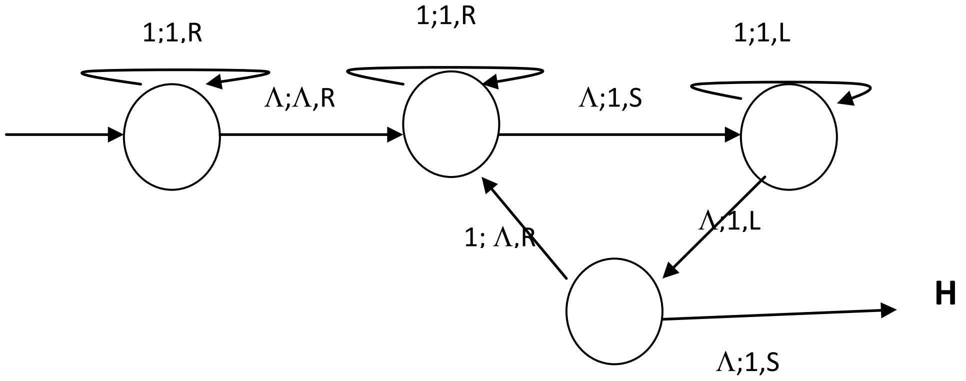
Hvis turingmaskinen $\mathfrak{M}$ med m tilstander beregner M, så kan vi lage en maskin med en ekstra tilstand som beregner M+1. Først bruker vi $\mathfrak{M}$ og deretter bruker vi en ny tilstand til å legge til en 1'er



Dette viser at beverfunksjonen er strengt voksende. (Hvorfor?)

Fordobling er beregnbar

Turingmaskinen under beregner 2N + 3



Maskinen går i en løkke a la maskin 3. Den legger først til en Λ og en 1'er til høyre. I løkka forskyves den blanke et og et trinn til venstre til den møter en ny blank og for hvert trinn legges det til en 1'er til høyre.

Beverfunksjonen er ikke beregnbar

Anta at den var det og at den bruker K tilstander. Da vil vi kunne lage en turingmaskin som beregner $\mathcal{B}$(2N+3) ved å bruke fordoblingsberegningen over. Vi vil da bruke K+4 tilstander. Men nå kan vi lage en bever som gjør følgende

- Start på blank tape
- Bruk N tilstander til å gi N 1'ere
- Bruk deretter turingmaskinen med K+4 tilstander til å gi $\mathcal{B}$(2N+3) 1'ere
- Til sammen bruker vi N+K+4 tilstander

Resultat: $\mathcal{B}(N+K+4) \geq \mathcal{B}(2N+3)$ for alle N

Spesielt får vi ved å sette inn N = K+2 at $\mathcal{B}(2K+6) \geq \mathcal{B}(2K+7)$ Men dette er umulig – beverfunksjonen er strengt voksende.

Stoppeproblemet er uløsbart

Hvis stoppeproblemet var løsbart, ville vi kunne regne ut beverfunksjonen. Gitt f eks 10 tilstander. Da er det et endelig antall turingmaskiner vi måtte undersøke. Det vil være 20 linjer i hver transisjonstabell, og for hver av dem $2\times10\times3 = 60$ muligheter. Det vil til sammen være 20^{60} mulige turingmaskiner. Noen vil stoppe riktig opp og være bevere, mens andre vil ikke gjøre det. Vi vil kunne regne ut beverfunksjonen for 10 tilstander. Tilsvarende for et hvilket som helst tall.